Matematyka MAT1437

Semestr letni 2023/2024

Lista 2 (Równania różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu)

1. Wyznaczyć rozwiązania podanych równań rzędu drugiego:
   (a) $t^2y'' - (y')^2 = 0$
   (b) $ty'' - y' = t^2e^t$
   (c) $2ty'y'' = (y')^2 - 1$
   (d) $y''t = 2y' + 4t^5$

2. Rozwiązać (scałkować) podane równania różniczkowe:
   (a) $y^3y'' + 1 = 0$
   (b) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$
   (c) $(y-1)y'' = 2(y')^2$

3. Rozwiązać podane równania różniczkowe z zadanymi warunkami początkowymi:
   (a) $y'' = \frac{y'}{t} + \frac{t^2}{y'},\ y(2) = 0, y'(2) = 4$
   (b) $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$
   (c) $2y'' = 3y^2,\ y(-2) = 1, y'(-2) = 1$
   (d) $ty'' = 2(t + y'),\ y(1) = 0, y'(1) = -1$

4. Sprawdzić, że funkcje $\varphi(t) = e^{-t}$, $\psi(t) = e^{3t}$ oraz ich dowolna kombinacja liniowa są rozwiązaniami równania $y'' - 2y' - 3y = 0$.

5. Sprawdzić, że podane funkcje tworzą na zadanych przedziałach układy fundamentalne wskazanych równań różniczkowych. Znaleźć rozwiązania tych równań z zadanymi warunkami początkowymi:
   (a) $y_1(t) = e^{-t}, y_2(t) = e^{2t}, \quad (-\infty, \infty),$
   $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = -5;$
   (b) $y_1(t) = \ln t, y_2(t) = t, \quad (0, e),$
   $t^2(1 - \ln t)y'' + ty' - y = 0, \quad y(1) = 2, y'(1) = 1;$
   (c) $y_1(t) = t, y_2(t) = e^t, \quad (-\infty, 1),$
   $(t-1)y'' - ty' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$
   (d) $y_1(t) = t, y_2(t) = t^2, \quad (0, \infty),$
   $t^2y'' - 2ty' + 2y = 0, \quad y(1) = 3,\ y'(1) = 1.$

6. Do każdego z podanych równań różniczkowych wskazano jedno jego rozwiązanie. Wykorzystując metodę obniżania rzędu równania znaleźć rozwiązania ogólne tych równań różniczkowych:

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad \varphi(t) = e^{3t};$

   (b) $y'' + 4y = 0, \quad \varphi(t) = \cos 2t$

   (c) $t^2y'' - ty' - 3y = 0, \quad \varphi(t) = \frac{1}{t};$

   (d) $(t-1)y'' - (t+1)y' + 2y = 0, \quad \varphi(t) = e^t;$

7. Wyznaczyć równania różniczkowe liniowe jednorodne o stalych wspólczynnikach postaci $y'' + py' + qy = 0$, jeżeli podane są pierwiastki ich wielomianów charakterystycznych:

   (a) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}i,$

   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2,$

   (c) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3,$

   (d) $\lambda_1 = i.$

8. Rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe o stalych współczynnikach:

   (a) $6y'' - 5y' + y = 0,$

   (b) $y'' - y' - 2y = 0,$

   (c) $4y'' - 4y + y = 0,$

   (d) $y'' - 4y' + 5y = 0,$

   (e) $y'' - 2y' + 5y = 0,$

   (f) $7y'' + 4y' - 3y = 0$

9. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

   (a) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0;$

   (b) $y'' + 9y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1;$

   (c) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = 3;$

   (d) $y'' - 7y' + 12y = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -2.$

10. Sprawdzić, że podane funkcje są rozwiązaniami wskazanych równań różniczkowych liniowych niejednorodnych. Wyznaczyć rozwiązania ogólne tych równań lub zagadnień początkowych:

   (a) $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5t}, \quad \varphi(t) = 2t^2e^{-5t},$

   (b) $y'' + 4y = \sin 2t, \quad \varphi(t) = -\frac{1}{4}t\cos 2t,$

   (c) $y'' - y' - 2y = 4t - 2e^t, \quad \varphi(t) = 1 - 2t + e^t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

11. Korzystając z metody uzmienniania stałych rozwiązać podane równania różniczkowe:

    (a) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}$,
    (b) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2t}$,
    (c) $y'' - 2y' \operatorname{tg} t = 1$,
    (d) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^t}$.

12. Korzystając z metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać podane równania różniczkowe liniowe niejednorodne:

    (a) $y'' + 2y' + y = -2$,
    (b) $y'' - 4y' + 4y = t^2$,
    (c) $y'' + 3y' = 3te^{-3t}$,
    (d) $y'' + 5y' + 6y = 10(1-t)e^{-2t}$,
    (e) $y'' + 4y' - 4y = 8\sin 2t$.

13. Korzystając z twierdzenia o składaniu rozwiązań i metody współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) rozwiązać podane równania różniczkowe:

    (a) $y'' - y' - 2y = e^t + e^{-2t}$,
    (b) $y'' - y = t + \sin t$,
    (c) $y'' - 4y' = 2\cos^2 4t$,
    (d) $y'' - y' - 2y = 4t - 2e^t$.

14. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

    (a) $y'' + y = 2(1-t), \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -2$,
    (b) $y'' - 6y' + 9y = 9t^2 - 12t + 2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$,
    (c) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin t, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$,
    (d) $y'' + y' = e^{-t}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$.